2.3.3 Kreisel für Präzession (erzwungene)

******

1 Motivation

Dieser Versuch zeigt auf eindrückliche Weise, dass ein nicht im Schwerpunkt gelagerter, sich schnell drehender, Kreisel unter dem Einfluss der Schwerkraft nicht etwa seitlich wegkippt, sondern präzediert!

Dies ist ein absoluter Spitzenversuch!

Die meisten Studenten wollen nämlich ihren Augen nicht trauen, wenn der Kreisel nicht kippt, sondern präzediert!

2 Experiment

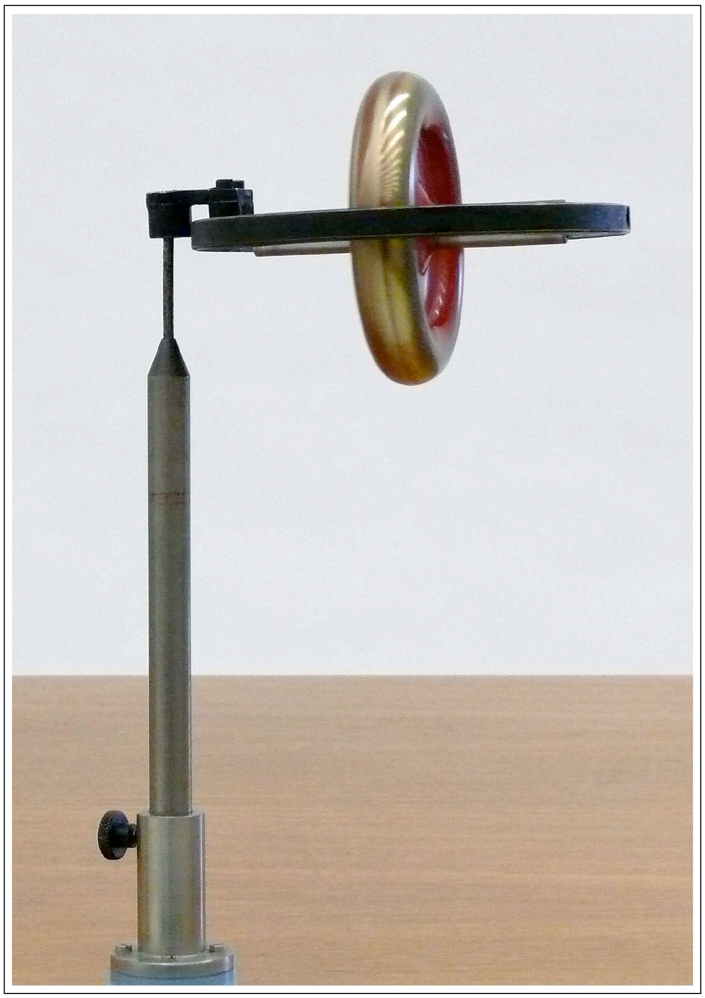

Abbildung 1: Präzedierender Kreisel

Ein schwerer Kreisel wird mit einer Schleifscheibe in schnelle Rotation versetzt und mit dem Achsenrand seitlich auf ein Stativ gesetzt (siehe Abb. 1). Beim Loslassen präzediert der Kreisel.

3 Theorie

Wenn ein Kreisel nicht im Schwerpunkt unterstützt ist, bewirkt das Schwerefeld der Erde ein Drehmoment $\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ und ändert dadurch den Drehimpuls. Wir behandeln hier nur den einfachsten Fall, bei dem sich der Kreisel um seine Figurenachse dreht. Damit fallen alle drei Achsen $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{c}$ zusammen, und es gibt keine Nutation (siehe Abb. 2).

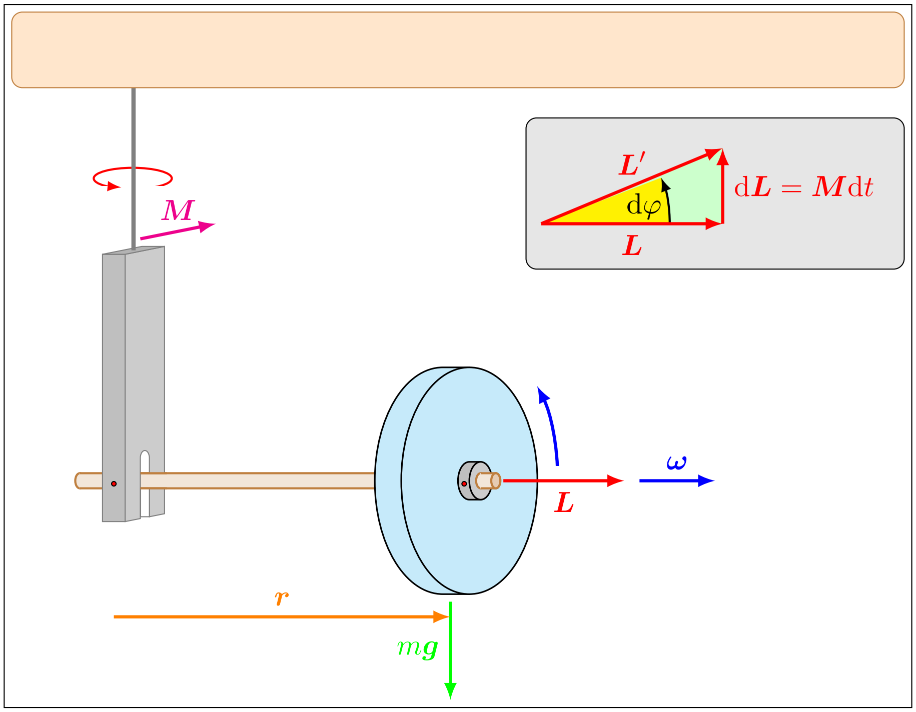

Abbildung 2: Zur Präzession des symmetrischen Kreisels.

Die Schwerkraft bewirkt das Drehmoment

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g}\,, \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{r}$ der Abstandsvektor vom Unterstützungspunkt zum Schwerpunkt ist. Da das Drehmoment senkrecht zum Drehimpuls steht, ändert sich nur die Richtung, nicht aber der Betrag von $\boldsymbol{L}$, so dass der Drehimpuls und damit auch die Figurenachse und der Kreisel selbst sich horizontal im Kreise drehen. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}L}{L} = \mathrm{d}\varphi \tag{2}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_P dieser Rotation beträgt

$$\omega_\mathrm{P} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega} \tag{4}$$

Dabei wurde $\omega_\mathrm{P} \ll \omega$ angenommen. Man bezeichnet diese Kreisbewegung als **Präzession**. Falls die Kreiselachse $\boldsymbol{c}$ den Winkel α mit der Vertikalen bildet, ist der Betrag des Drehmoments gleich

$$M = mgr \sin\alpha \tag{5}$$

Die Änderung $\mathrm{d}L$ des Drehimpulses ist nun jedoch für $\mathrm{d}L \ll L$ gleich

$$\mathrm{d}L = L \sin\alpha \, \mathrm{d}\varphi \tag{6}$$

Daraus folgt für $\omega_\mathrm{P} \ll \omega$:

$$\omega_\mathrm{P} = \frac{mgr \sin\alpha}{J\omega \sin\alpha} = \frac{mgr}{J\omega} \tag{7}$$

Man sieht also, dass die Präzessionsgeschwindigkeit unabhängig von der räumliche Orientierung der Kreiselachse ist und nur vom Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ und dem Drehmoment $\boldsymbol{M}$ abhängt.